Correction problème 2 : chariot à réaction

On considère un chariot de masse m_C = 100,0 g muni d'un dispositif à ressort lié au chariot et capable d'éjecter une bille de masse m_B. L'ensemble est initialement immobile.
A à instant pris comme origine des dates, le mécanisme est déclenché et la bille est projetée horizontalement. La phase de propulsion de la bille dure 200 ms : pendant cette durée, le chariot exerce sur la bille une force constante.
On dispose d'un enregistrement des mouvements du chariot et de la bille. Le centre d'inertie de la bille est repéré par le point B, et celui du chariot est repéré par le point C. L'intervalle de temps entre chaque point est de τ = 40 ms.

1. Détermination de la masse de la bille.

1.1. Quel est le référentiel adapté pour étudier le mouvement du chariot ?

La durée du mouvement est suffisamment faible pour que le référentiel terrestre puisse être considéré comme galiléen. De plus, le chariot est initialement immobile dans ce référentiel, ce qui en fait le référentiel le plus simple pour étudier le mouvement du chariot.

1.2. Faire le bilan des forces sur le système {chariot et bille} avant l'éjection de la bille.

D'après le principe d'inertie, le système étant immobile dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen, les forces qui s'exercent sur le système se compensent.

Ces forces sont : le poids vertical vers le bas et la réaction du support verticale vars le haut.

1.3. Calculer la valeur de la quantité de mouvement du chariot au point C_8.

La quantité de mouvement est égale au produit de la masse par la vitesse : $\vec{p}_C = m\vec{v}_C$

Or, au point C_8, la vitesse vaut : $v_{C8} = \dfrac{C_7C_9}{2\tau}$

Le mouvement étant rectiligne selon l'axe Ox, on a : $v_{C8} = v_{Cx,8} = \dfrac{x_{C9} - x_{C7}}{2\tau}$

A.N : v_{C8} = 1,6 m.s^{-1}.

Donc : p_{C8} = 0,16 kg.m.s^{-1}

1.4. Tracer sur le document 1 en annexe le vecteur quantité de mouvement du chariot au point C_8 en utilisant l'échelle suivante : 1 cm pour 0,1 kg.m.s^{-1}

Le vecteur mesure 1,6 cm de longueur.

1.5. Quelle hypothèse permet d'appliquer le principe de conservation de la quantité de mouvement ?

La quantité de mouvement se conserve si la somme des forces exercées sur le système est nulle.

1.6. En utilisant le principe d'inertie, montrer que cette hypothèse est vérifiée ici.

Le mouvement de la bille est rectiligne uniforme après son éjection, il en va de même pour le chariot : cela signifie que la somme des forces exercées sur la bille et sur le chariot sont toutes les deux nulles avant et après l'éjection de la bille. Donc la quantité de mouvement se conserve dans cette situation.

1.7. En déduire sur le document 1 en annexe le tracé du vecteur quantité de mouvement de la bille au point B_8. Justifier rigoureusement la détermination de ce vecteur.

Avant l'éjection de la bille, la quantité du mouvement du système {chariot et bille} est nulle. On a donc : $\vec{p}_C + \vec{p}_B = \vec{0}$ après l'éjection de la bille, d'après la conservation de l quantité de mouvement.

Donc : $\vec{p}_B = -\vec{p}_C$

1.8. Calculer la masse de la bille.

$\vec{p}_B = -\vec{p}_C$ soit $m_B \vec{v}_B = m_C \vec{v}_C$ d'où $m_B v_B = m_C v_C$ soit : $m_B = m_C \dfrac{v_C}{v_B}$

Or, $v_{B8} = v_{Bx,8} = \dfrac{x_{B9} - x_{B7}}{2\tau}$

A.N : v_{B8} = 4,8 m.s^{-1}

Donc : m_B = 33 g.

2. Comparaison de l'accélération de la bille et du chariot.

2.1. Tracer sur le document 1 en annexe les vecteurs vitesse de la bille et du chariot aux instants t_1 = 40 ms et t_3 = 120 ms, c'est-à-dire les vecteurs vitesse aux points B_1 et B_3, et aux points C_1 et C_3. Vous prendrez l'échelle suivante : 1 cm pour 1 m.s^{-1}

Calcul des vitesses : $v_{B3} = v_{Bx,3} = \dfrac{x_{B3} - x_{B1}}{2\tau}$ et $v_{B1} = v_{Bx,1} = \dfrac{x_{B2} - x_{B0}}{2\tau}$

On obtient : v_{B3} = 3,6 m.s^{-1} et v_{B1} = 1,2 m.s^{-1}

De même : v_{C3} = 1,2 m.s^{-1} et v_{C1} = 0,40 m.s^{-1}

2.2. Tracer sur le document 1 en annexe avec une échelle adaptée le vecteur accélération du chariot au point C_2 et celui de la bille au point B_2.

Calcul des valeurs des accélérations, le mouvement étant rectiligne : $a_{B2} = a_{Bx,2} = \dfrac{v_{B3} - v_{B1}}{2\tau}$ et

$a_{C2} = a_{Cx,2} = \dfrac{v_{C3} - v_{C1}}{2\tau}$

On obtient : a_{B2} = 30 m.s^{-2} et a_{C2} = 10 m.s^{-2}.

On prend comme échelle : 1 cm pour 10 m.s^{-2}.

2.3. Comparer la force que le chariot exerce sur la bille et celle que la bille exerce sur le chariot.

D'après la 3^{e} loi de Newton, ces forces sont égales en valeur et de sens opposés.

2.4. En déduire pourquoi l'accélération de la bille à l'instant t_2 = 80 ms doit être plus grande que celle du chariot au même instant.

D'après la 2^{e} loi de Newton appliquée au système bille de masse constante dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen : $m_B \vec{a}_B = \sum \vec{F}$

Or, la seule force exercée à l'instant t_2 sur la bille qui n'est pas compensée est la force exercée par le chariot : $m_B\vec{a}_B = \overrightarrow{F_{C/B}}$ donc : $a_B = \frac{F_{C/B}}{m_B}$

De même, pour le chariot, la 2e loi de Newton appliquée au système chariot de masse constante dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen permet d'écrire : $m_C\vec{a}_C = \sum\vec{F}$

La seule force exercée sur le chariot qui n'est pas compensée est la force exercée par la bille : $m_C\vec{a}_C = \overrightarrow{F_{B/C}}$ donc : $a_C = \frac{F_{B/C}}{m_C}$

Or, d'après la question précédente, $F_{C/B} = F_{B/C}$.

Donc l'accélération de la bille est plus grande que celle du chariot, car la bille est soumise à une force de même intensité, mais a une masse plus faible. On retrouve le fait que la masse est facteur d'inertie.

2.5. Montrer que le rapport des accélérations du chariot et de la bille à l'instant t_2 vérifie l'égalité suivante :

A l'instant t_2, $a_C = \frac{F_{B/C}}{m_C}$ et $a_B = \frac{F_{C/B}}{m_B}$.

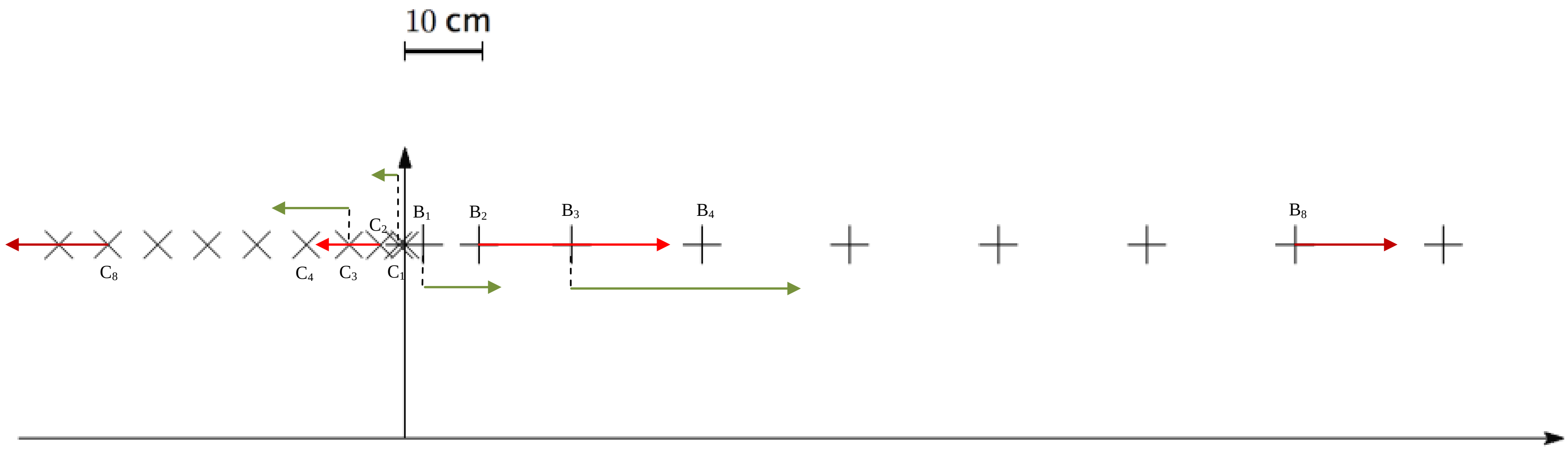
Or, d'après la question précédente, $F_{C/B} = F_{B/C}$.

Donc : $\frac{a_C(t_2)}{a_B(t_2)} = \frac{m_B}{m_C}$

2.6. En déduire une deuxième détermination de la masse de la bille et comparer avec la première.

$m_B = m_C \frac{a_C(t_2)}{a_B(t_2)}$ A.N : $m_B = 33$ g

Document 1 : trajectoires du chariot et de la bille.



Document 2 : positions du centre d'inertie C du chariot et du centre d'inertie B de la bille au cours du temps.

t	xB	yB	xC	yC
ms	m	m	m	m
0	0	0,211	0	0,211
40	0,024	0,212	-0,008	0,211
80	0,096	0,21	-0,032	0,21
120	0,216	0,211	-0,072	0,212
160	0,384	0,21	-0,128	0,21
200	0,576	0,212	-0,192	0,21
240	0,768	0,21	-0,256	0,21
280	0,96	0,21	-0,32	0,211
320	1,152	0,211	-0,384	0,211
360	1,344	0,21	-0,448	0,21
400	1,536	0,212	-0,512	0,21
440	1,728	0,21	-0,576	0,211
480	1,92	0,21	-0,64	0,21