Partie 2 – Chapitre 7 : lois de Kepler

1. Quels sont les mouvements des planètes et des satellites ?

J. Kepler publie en 1609 trois lois qui décrivent les mouvements des planètes autour du Soleil.

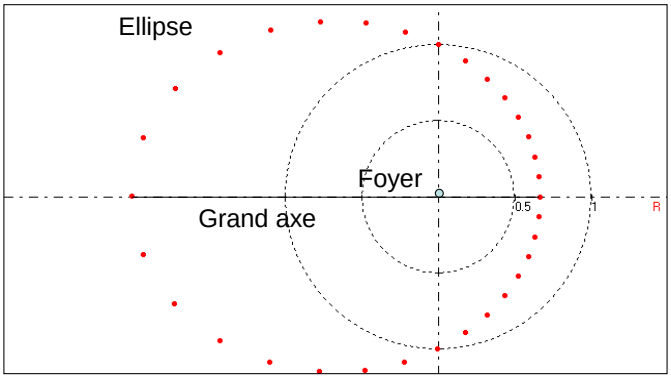
1.1. La première loi de Kepler.

- ***Dans le référentiel héliocentrique, les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.***

- Une ellipse est une courbe mathématique appartenant à la famille des coniques. Elle est obtenue en fixant deux points S_1 et S_S, appelés foyers, et en déplaçant un point P de telle façon que la distance S_1S_2P reste constante.

- La distance du Soleil à la planète considérée n'est pas constante. La position la plus éloignée du Soleil s'appelle l'aphélie, la position la plus proche est le périhélie.

- ***Le grand axe*** est la distance de l'aphélie au périhélie.



1.2. Deuxième loi de Kepler.

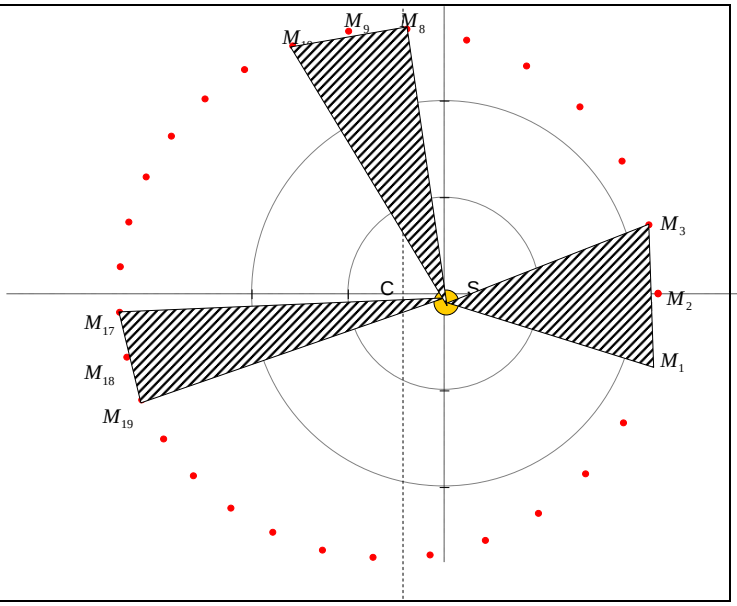
- ***Si M est le centre d'une planète et S le centre du Soleil, alors le segment SM balaie des aires égales en des temps égaux.***

- La deuxième loi, ***aussi appelée loi des aires***, implique que la vitesse de la planète ou du satellite dans le référentiel de son astre attracteur varie au cours du mouvement.

- La vitesse est maximale au périhélie et minimale à l'aphélie.

- Si la trajectoire de la planète ou du satellite est circulaire, alors la deuxième loi implique que sa vitesse est constante.

- Lorsqu'on peut modéliser la trajectoire d'une planète ou d'un satellite par un cercle centré sur l'axe attracteur, alors le mouvement est nécessairement uniforme.



1.3. Troisième loi de Kepler

- ***Soit T la période de révolution d'une planète ou d'un satellite dans le référentiel de son axe attracteur, et a le demi grand axe de l'ellipse trajectoire.***
  Le rapport de la période au carré par le cube du demi grand-axe est une constante pour toutes les planètes ou les satellites autour de leur axe attracteur.

- ***Ce rapport*** k ***dépend uniquement de la masse de l'astre attracteur. Il est indépendant de la planète ou du satellite.***

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

Partie 2 – Chapitre 7 : lois de Kepler

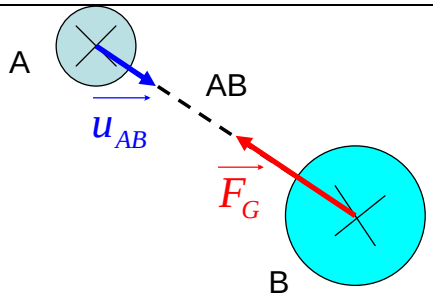
2. La loi de la gravitation universelle.

En 1687, en même temps que se trois lois de la dynamique, Newton énonce la loi de la gravitation universelle de la façon suivante :

« La gravité appartient à tous les corps, et elle est proportionnelle à la quantité de matière que chaque corps contient.
Les forces par lesquelles les planètes principales sont perpétuellement retirées du mouvement rectiligne, et retenues dans leurs orbites, tendent au soleil, et sont réciproquement comme le carré de leurs distances à son centre. »

- La force gravitationnelle qu'un corps A de masse M exerce sur un corps B de masse m s'exprimer vectoriellement :

$$\vec{F}_{A/B} = -\left(G\frac{m.M}{AB^2}\right)\vec{u}_{AB}$$



- Le vecteur $\vec{u}_{AB}$ est un vecteur unitaire : sa norme vaut 1. Il donne la direction AB et le sens de A vers B.
  Le signe (-) permet d'exprimer que la force de gravitation est attractive.
  Notons que les corps s'attirent avec la **même intensité**, bien que leurs masses soient différentes !

3. Mouvement des planètes et des satellites dans l'approximation du mouvement circulaire.

3.1. Détermination de la vitesse de la planète ou du satellite.

- Considérons comme système un mobile de masse m en mouvement autour d'un astre de masse M dans le référentiel du centre de cet astre, supposé galiléen. Le mobile est soumis à la seule force de gravitation de l'astre attracteur.
- La seconde loi de Newton s'écrit : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_G$
- Or, la masse du mobile est constante, donc : $m.\vec{a} = \vec{F}_G$

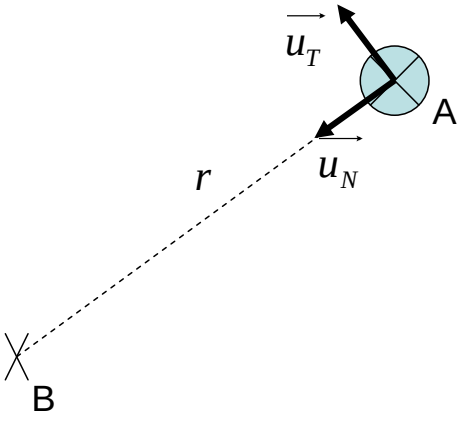
- Le repère adapté à la situation est le repère de Frénet, comprenant un vecteur normal $\vec{u}_N$ dirigé de B vers A et un vecteur tangent $\vec{u}_T$ perpendiculaire au vecteur normal.

- Dans ce repère, l'accélération se décompose de la façon suivante :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{r}\vec{u}_N$$

- La force de gravitation s'écrit dans ce repère :

$$\vec{F}_{A/B} = \left(G\frac{m.M}{r^2}\right)\vec{u}_N$$



• Donc : $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{v^2}{r} = \left(G\frac{M}{r^2} \right) \end{cases}$	$\frac{dv}{dt} = 0$ implique que la vitesse est constante, donc *le mouvement est circulaire et uniforme.* $v^2 = G\frac{M}{r}$ permet de trouver ***la valeur de cette vitesse.***	$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$

3.2. Démonstration de la troisième loi de Kepler.

La vitesse angulaire ω est liée à la vitesse instantanée par la relation : $v = r \times \omega$.

De plus, la période de révolution est donnée par la relation : $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Par conséquent, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme : $v = \frac{2\pi \times r}{T}$

Or, d'après ce qui précède, $v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$ **,** soit, en remplaçant v par son expression : $\sqrt{G\frac{M}{r}} = \frac{2\pi \times r}{T}$

En élevant les deux membres au carré, il vient : $G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi \times r}{T} \right)^2$ donc : $G\frac{M}{(2\pi)^2} = \frac{r^3}{T^2}$

Autrement dit **:**

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

Ainsi, non seulement la théorie de la gravitation newtonienne permet de démontrer la 3e loi de Kepler, mais de surcroît elle offre la valeur de la constante, qui dépend de la masse de l'astre central.
Toutes les planètes du système solaire auront donc le même rapport de leur période de révolution au carré par le rayon de leur trajectoire au cube. Ce rapport sera différent pour les satellites terrestres par exemple.
Soient M_S la masse du Soleil et M_T la masse de la Terre. On a :

- **Pour les planètes du système solaire :** $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$
- **Pour les satellites terrestres :** $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

Ce dernier résultat implique en particulier que les satellites **géostationnaires**, dont la période de révolution est égale à la période propre de rotation de la Terre autour de son axe des pôles, **se situent à une altitude déterminée.**